Unterschiedliche Herangehensweisen in der Experimental und Theoretischen Physik am Beispiel des Faden-Pendels

I. Allgemeines

Die hier dargestellte Gegenüberstellung von experimenteller und theoretischer Herangehensweise an ein physikalisches Problem am Beispiel des Pendels ist kleinschrittig und mit allen Rechnungen angegeben, um ein Nachvollziehen zu erleichtern.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten dies in den Unterricht einzubauen. Es hat sich als sehr erfolgreich erwiesen, den experimentellen Weg von den Schülerinnen und Schülern selbstständig durchführen zu lassen. Von der Aufstellung der Fragen über das Erstellen eines Grafen bis hin zur mathematischen Modellierung. Also als freien Versuch, den die Schülerinnen und Schüler selbstständig planen, durchführen und auswerten. Die mathematische Modellierung kann entweder durch ein Fit-Programm, einen grafikfähigen Taschenrechner oder durch eine Linearisierung bewerkstelligt werden. Es ist eine gute Einführung in das Gebiet Schwingungen und Wellen, welches z. B. in Niedersachsen nach dem Wechselstrom aufgegriffen wird [1, S. 91], um dann in das Thema Wellen und Licht überzuführen. Der theoretische Weg ist höchstwahrscheinlich schwierig zu verstehen und sollte von Ihnen möglichst langsam und ausführlich durchgeführt werden. Es geht hier nicht darum, dass Schülerinnen und Schüler jeden einzelnen Schritt verstehen, sondern dass sie einmal die Herangehensweise in der theoretischen Physik sehen und erkennen, dass beide Wege zu einem ähnlichen Ergebnis führen.

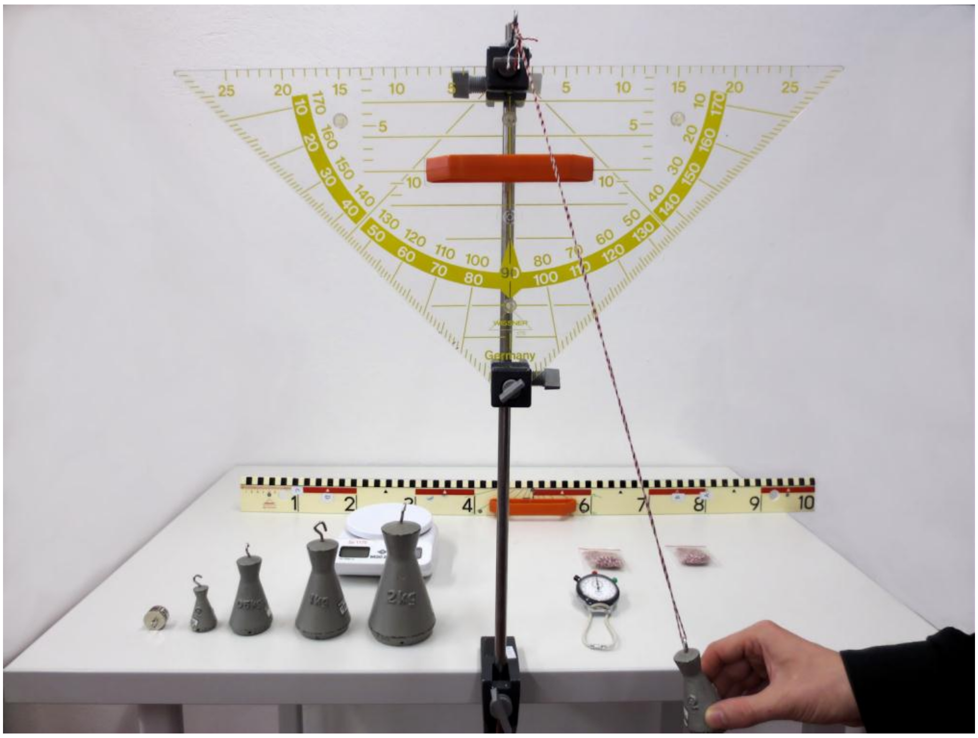


Abbildung 1: Pendel mit allen nötigen Gerätschaften

Die Ausarbeitung und Zusatzinformationen der Schritte findet sich in Kapitel I bis IV

Die Planung der Stunden könnte wie folgt ablaufen:

1. Doppelstunde: Versuch (siehe Kap I.1)

- Vorstellen des Pendels. Es hat sich als gut erwiesen, so etwas wie den Kerzenleuchter oder eine Pendeluhr als Beispiel zu nehmen, ein anderes Pendel aus dem Alltag wäre auch denkbar z. B. Schaukel oder Riesenschaukel (Videoclip 1 sehr spektakulär [2] Videoclip 2 durch die Helmkamera kann man den Wendepunkt und die maximale Geschwindigkeit gut erkennen [3]).
- Hinführung z. B. über eine Frage: Von was hängt die Schwingungsdauer ab?
- Schülerversuch: (siehe Kap II. 1)
  Entweder man gibt vor, was gemessen werden soll oder lässt die Schülerinnen und Schüler selbstständig den Versuch entwerfen (hat sich im Test als praktikabel erwiesen). Genügend Materialien wie Faden, Aufhängungen, Stangen und Halterungen, Winkelmesser (gut mit einem großen Tafelgeodreieck zu bewerkstelligen), Stoppuhren und unterschiedliche Gewichte sollten in ausreichender Anzahl vorrätig sein. Die völlige Selbstständigkeit hat den Schülerinnen und Schülern im Testunterricht viel Spaß bereitet.
  Bei einem vorgegebenen Versuch wird die Durchführung ungefähr 45 Minuten dauern, bei einem freien Versuch einiges mehr. Die Zeit sollte aber nach Möglichkeit gegeben werden, da hier eigenes Denken, Planen, Herangehen, Messen, Aufnehmen und Auswerten geübt werden kann.

2. Doppelstunde: Auswertung (sieh Kap II.4)

- Die Auswertung des Versuches erfolgt über mehrere Schritte. Vom Aufstellen einer Aussage, über das Zeichnen eines Grafen, bis hin zur mathematischen Interpretation des Grafen. Das Fitten kann durch ein Computerprogramm, eine Linearisierung oder einen grafikfähigen Taschenrechner erfolgen.
- Formulieren eines Ergebnisses

3. Einzelstunde: Theoretische Herangehensweise (siehe Kap III)

Dies ist ein etwas heikles Unterfangen, da die Mathematik, die man dafür braucht meist das Schulniveau ein wenig übersteigt. Es geht auch nicht darum, den mathematischen Teil vollständig nachzuvollziehen, sondern darum zu zeigen, dass man aus zwei völlig unterschiedlichen Herangehensweisen zu einem ähnlichen Ergebnis kommt. Damit Schülerinnen und Schüler begreifen, dass es in der Physik unterschiedliche Ansätze zum Lösen eines Problems gibt und bei beiden die Mathematisierung eine wichtige Rolle spielt. Es ist wichtig darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler bei der Herleitung nicht abschalten.

- Zeichnung zur Ermittlung der Bewegungsgleichung
- Gleichsetzung der Formeln und Aufstellen einer DGL
- Schwingungsansatz als eine Lösung

- Formulierung eines Ergebnisses
- Vergleich zwischen der Formel aus der Messung und der Formal aus der Theorie (siehe Kap. IV)
- Entweder überprüfen der Formel an einem (sehr) langen Faden oder Rechnen einer Aufgabe in der die Formel benutzt wird (z. B. Wie lange ist das Seil bei Videoclip [4]?).

Didaktischer Einschub:

Obwohl das Experiment auf den ersten Blick unspektakulär und langweilig wirkt, ist es dennoch möglich ein wenig Spannung und Verblüffung einzubauen. Falls sie dieses Experiment einmal nicht als Schüler-, sondern als Lehrerversuch verwenden wollen, sollten Sie, wenn es zur Vorführung kommt, darauf achten, dass Sie die Fragen in der hier gestellten Reihenfolge stellen, also zuerst die Masse, dann die Auslenkung und erst am Ende die Fadenlänge ändern. Denn wenn Sie zwei Gewichte mit z. B. 6 g und 2000 g wählen und vorher fragen, ob dieses die Pendellänge beeinflusst, werden Ihnen die meisten Zuschauer dies mit „Ja, das Gewicht macht etwas aus.“ beantworten. Doch im Rahmen der Messgenauigkeit werden Sie keinen Unterschied feststellen. Ebenso können Sie beim Auslenkungswinkel vorgehen, hier eignen sich z. B. ein Winkel von 5° und 70°. Sie haben dann ihre Zuschauer so verblüfft, dass wenn Sie jetzt die Fadenlänge verändern und vorher fragen, ob diese etwas ausmacht, viele sagen werden: „Nein, dies macht nichts aus.“. Aber genau dies ist der Faktor (Pendellänge), der für die Schwingungsdauer verantwortlich ist. Vielleicht haben Sie es durch die emotionelle Verwirrung geschafft, dass sich Ihre Zuhörerinnen und Zuhörer den Zusammenhang merken. Denn über die Verblüffung schaffen Sie eine emotionale Verbindung, die für das Behalten von Gelerntem entscheidend wichtig ist [5, 6].

I.1 Beobachtung

Eine Anekdote über GALILEIs Entdeckung des Pendels[1]:

Während des Besuches einer Messe im Dom zu Pisa (1583) beobachtet GALILEI[2] einen hin- und herpendelnden Kronleuchter. Eine Beobachtung, die sicher schon viele vor ihm gemacht haben, aber sein Interesse gilt hierbei weder dem Anblick des kostbaren Materials oder der künstlerischen Gestaltung noch der filigranen Verarbeitung. Er beobachtet die Bewegung des Leuchters. Er erfasst, dass Ausschläge von links nach rechts mit der Zeit immer kleiner werden, bis sie zur Ruhe kommen. Eine Beobachtung, die wir alle einmal in ähnlicher Weise gemacht haben.

[1] von VINCENZO VIVIANI 1622-1703 Schüler GALILEIS

[2] GALILEO GALILEI 1564-1642 Astronom, Philosoph, Mathematiker und Physiker

Aber Galileis „forschender" Blick erkennt mehr bei dieser Bewegung. Obwohl das Hin- und Herpendeln kleiner wird, somit ebenfalls der zurückgelegte Weg, scheint die Zeit bei der Bewegung gleich zu bleiben. Die Anekdote besagt, dass er für das Messen der Zeit seinen Herzschlag gebraucht hat. Für kurze Zeitintervalle kann der Ruhepuls die Funktion einer Uhr übernehmen.

Abbildung 2: Illustration des galiläischen Pendelversuchs

An dieser Anekdote kann eine grundlegende Herangehensweise in der Physik erkannt werden, das **Beobachten**. GALILEI beobachtet hier eine Alltäglichkeit, aber nicht in ihrer Alltäglichkeit, sondern in der ihr innewohnenden Besonderheit. Er lässt sich dabei nicht von der *Maya*[3] täuschen, sondern geht dem Wesentlichen auf den Grund.

I.2 Idealisierung

Bei der Pendelbewegung gibt es eine Vielzahl von interessanten Erscheinungen, doch muss für die Erfassung des Wesentlichen aus dieser Vielheit das herausgezogen werden, was von Interesse ist und dieses gezielt vereinfacht werden.

Die Abbildung 1 kann als künstlerische Idealisierung gelten. Hier wird der Kronleuchter (links oben im Bild) zum Fadenpendel idealisiert. Es wird der Übergang von einer verwinkelten Naturerscheinung zu einer vereinfachten experimentellen Anordnung gezeigt. Der Kronleuchter ist zu einem Pendel zusammengeschrumpft, die Kette, an der er hängt, zu einem fast masselosen Faden stilisiert. Der Künstler lenkt die Aufmerksamkeit in das symbolische Zentrum des Bildes, in dem scheinbar ein Herz am Faden hängt[4].

I.3 3. Physikalische Begriffsbildung

Die Sprache hat in der Physik ein ähnliches Problem wie in allen Denkrichtungen. Ohne die physikalischen Fachbegriffe beschreibt man Vorgänge und Beobachtungen in unserer Alltagssprache. Fachbegriffe fassen Inhalte zusammen und sind präziser als die Alltagssprache. Es sollte aber klar sein, dass die Sprache der Physik immer in der Natur vorkommende Sachverhalte enthält und somit der Rücktransport der Begriffe in die Alltagswelt jederzeit möglich sein sollte. Der Abstraktionsgrad bleibt in beiden Richtungen möglich.

---

[3] MAYA: indische Göttin der Illusion, manchmal auch mit der Materie oder dem Materiellen gleichgesetzt. BUDDHA wird unter dem Bodhi-Baum das letzte Mal von der MAYA zu verführen versucht, doch er kann ihr widerstehen und erlangt die Erleuchtung.

[4] „Das Herz geben" ist die ungefähre Übersetzung von lat. „CREDERE", was so viel wie „glauben" bedeutet. Glauben hat in der altdeutschen Bedeutung in etwa den Sinn: „sich etwas lieb oder vertraut machen".

Die in unserem Beispiel passenden Fachwörter sind: *Fadenpendel, Pendellänge, Masse, Auslenkungswinkel, usw.*

I.4 Formulierung einer Frage

Aus der Beobachtung des Alltags kann über die Idealisierung und mittels der Beschreibung durch fachsprachliche Begriffe eine Fragestellung formulierten werden.

Für diese Beispiel wäre es: *Von welchen Faktoren hängt die Schwingungsdauer ab?*

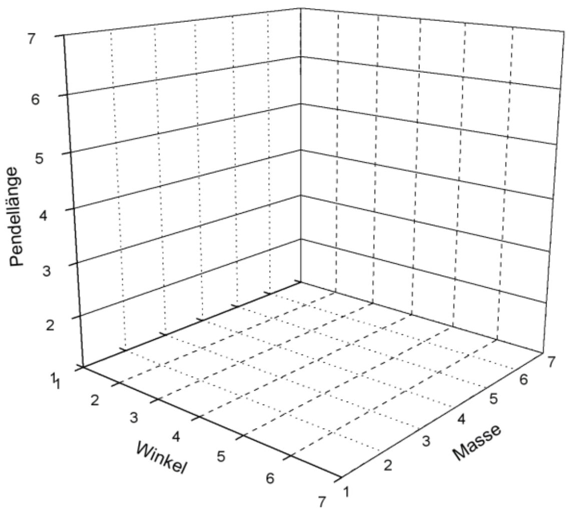


Abbildung 3: Variationsmöglichkeiten beim Fadenpendel

I.5 Hypothesenbildung

In der Hypothesenbildung werden die beteiligten Faktoren mittels unterschiedlichster Methoden ermittelt und ihre Abhängigkeit zueinander bestimmt. In der entstehenden Hypothese werden diese Faktoren aufgenommen und gegebenenfalls mit einer vermuteten Erklärung versehen. Während der Hypothesenbildung kann es auch zu einer Verfeinerung der Fragen kommen, da sich nicht immer zu überprüfende Aussagen finden lassen.

In unserem Beispiel wäre folgende Fragestellung denkbar:

Welche Einflüsse gibt es auf die Pendeldauer?

- Masse
- Pendelausschlag, Ablenkungswinkel
- Pendellänge

Können wir auf Grund von Überlegungen oder Beobachtungen jetzt schon eine Vermutung aufstellen?

II. Experimentelles Herangehen

Das experimentelle Herangehen an das geschilderte Problem ist wesentlich anders als das theoretische. In einem Versuch wird versucht die möglichen Parameter zu ergründen und diese einzeln zu variieren. Es ist ein eher induktiver Weg, da erst Einzelbeobachtungen gemacht werden, die dann induktiv zu einem allgemeinen Ergebnis führen sollen. Wichtig zu beachten ist, dass man nach der Datenerhebung durch ein Experiment nicht stehen bleibt, sondern die Daten in einem richtigen Maß aufträgt und dann interpretiert. Wenn man von der Erhebung (empirisch) in die Interpretation (rational) übergeht, wechselt man aus Sicht der Epistemologie (gr. ÉPISTÉME „Wissen, Wissenschaft, Erkenntnis“) vom Empirismus in den Rationalismus. Dieser Wechsel wird von vielen nicht berücksichtigt, ist aber philosophisch entscheidend. Der experimentelle Weg kann als induktiv angesehen werden.

II.1 Experimentelle Datenerhebung

Im experimentellen Strang wird im Anschluss an die Hypothesenbildung durch Experimente versucht, die aufgestellte Hypothese zu bestätigen oder zu widerlegen. Hierzu werden geeignete Versuche entwickelt, in denen alle wichtigen Faktoren *einzeln variiert* oder *die Variablen getrennt werden können*[5]. Hierbei ist zu beachten, dass Fehlerquellen im Voraus bedacht und minimiert werden.

Im Fall des Pendels werden somit in der experimentellen Überprüfung die drei Faktoren *Masse, Winkel* und *Pendellänge* variiert[6]. Die Abbildung 2 zeigt die dazugehörige Messmatrix. Empirisch korrekt müsste man jede Zelle einzeln ausfüllen, um vollständige Gewissheit zu haben. Die Zahlen 1 bis 7 stehen nicht direkt für den Zahlenwert, sondern für Platzhalter, also Winkel 1 entspricht **x** in °, Masse 1 **y** in kg und Pendellänge 1 **z** in m; es sind Nummerierungen für die Zellen, die kombiniert werden können. In diesem Fall sind es $7 \cdot 7 \cdot 7$ Kreuzungspunkte, was eine Anzahl von 343 Kombinationsmöglichkeiten ergibt.

Es ist aber schnell ersichtlich, dass so viele Einzelexperimente aller Kombinationen nicht machbar sind, denn es sind selbstverständlich nicht $7 \cdot 7 \cdot 7$, wie in diesem Beispiel, sondern beliebig viele · beliebig viele · beliebig viele. Deshalb ist man gezwungen, Verallgemeinerungen vorzunehmen und eine geplante und begründete Anzahl von Experimenten durchzuführen. Durchgeführte Experimente können/sollten wiederholt werden, um zu prüfen, ob sie ähnliche Werte liefern (Reproduzierbarkeit).

Eine Messgröße wird geändert, die anderen werden konstant gehalten. Falls die Masse geändert wird, bewegt man sich entlang der Massenachse (Masse 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), die beiden anderen Faktoren (Winkel 1 und Pendellänge 1) werden konstant gehalten, um die Abhängigkeit der Pendeldauer von der Masse zu untersuchen.

Ausgangsfrage: *Beeinflusst die Masse die Pendeldauer?*

Nachdem herausgefunden wurde, ob die Masse die Pendeldauer beeinflusst, verfährt man mit dem Auslenkungswinkel ebenso. Der Winkel ist jetzt zu variieren und die Masse und die Pendellänge konstant zu halten.

Ausgangsfrage: *Beeinflusst die Auslenkung die Pendeldauer?*

Als letztes variiert man die Pendellänge und hält die Masse und die Auslenkung konstant.

Ausgangsfrage: *Beeinflusst die Pendellänge die Pendeldauer?*

[5] Sie müssen hierfür linear unabhängig voneinander sein.

[6] Es sollte den Schülerinnen und Schülern aber auch möglich gemacht werden Faktoren zu variieren, die sie als wichtig ansehen (falls dies möglich ist).

Nach Durchführungen diverser Messungen ergibt sich ein gemittelt es Ergebnis bei 10 Einzelmessungen pro Länge von:

Länge *l* in m	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	1,25	1,5	2	2,25	2,5
Zeit *t* in s	0,71	0,9	1,16	1,53	2,1	2,51	2,72	3,29	3,42	3,55

Tabelle 1: Messwerte des Fadenpendels bei m = 250 g und φ = 10 °

II.2 Aufstellung eines Ergebnisses

Nachdem entsprechende Experimente durchgeführt wurden, sollte es eine Ergebnissicherung geben, also eine Aussage formuliert werden, die die wesentlichen Erkenntnisse qualitativ wiedergibt. Hierbei kann die Formulierung auch eine Tendenz aufzeigen.

Im Fall des Pendels:

Die Dauer der Pendelschwingung ist nicht von der Masse oder der Auslenkung abhängig. Die Messungen zeigen, dass sie von der Pendellänge abhängig ist. Je länger die Pendellänge, desto länger die Pendeldauer.

II.3 Fehlerbetrachtung

Eine physikalische Messung ist immer mit einem Fehler behaftet. Daher ist es nicht sinnvoll, Messergebnisse mit beliebiger Exaktheit anzugeben (beliebig große Anzahl von Ziffern nach dem Komma). Eine allgemeine Konvention ist hier, dass die letzte Stelle die Unsicherheit der Messung angibt. Um dies zu verdeutlichen ein Beispiel: $t = 5{,}3 \pm 0{,}2$ s entspricht der Vorgabe, es gibt eine Nachkommastelle, da der Fehler $0{,}2$ s entspricht. Falsch wäre es $t = 5{,}37582154 \pm 0{,}2$ s anzugeben, da hier der Fehler größer als der exakte Messwert ist und die vielen Stellen hinter dem Komma im Fehlerintervall sinnlos sind.

Welche Fehler können auftreten?

- Systematische Fehler
- Statistische Fehler / Messfehler
- Analytische Fehler

Systematische Fehler:

Systematische Fehler können sehr viele Ursachen haben, z.B. ein verschobener Nullpunkt, ein falsch kalibriertes Messgerät, eine Störung, die die Messung beeinflusst usw. Diese Art von Fehler, die immer zumindest qualitativ analysiert werden sollte, kann z. B. durch eine gute Versuchsdurchführung (sehr gute Messapparaturen) wenn auch nicht völlig vermieden, so doch vernachlässigt werden.

Im Beispiel des Pendels ist es möglicherweise das falsche Ablesen der Pendellänge (statt der Strecke vom Aufhängepunkt zum Messmittelpunkt wird lediglich die Fadenlänge gemessen).

Einschub:

Die Messung des Pendeldurchganges kann durch zwei ausgezeichnete Möglichkeiten geschehen. Einmal der Nulldurchgang (Geschwindigkeit des Pendels maximal, bzw. die kinetische Energie maximal) oder der Wendepunkt (Geschwindigkeit des Pendels minimal, bzw. die potenzielle Energie maximal). Exakter ist der Nulldurchgang, da es sich um einen festen Punkt handelt. Beim Zählen von mehreren Pendelschwingungen kann es aber beim Nulldurchgang jedoch schneller zu Fehlzählungen kommen, da das Pendel pro Schwingung den Nulldurchgang zweimal passiert. Aus vielen Versuchen hat sich ergeben, dass die Wahl welchen Punkt man zum Zählen nimmt sich nicht auf das Ergebnis auswirkt, deshalb wird der Wendepunkt (Geschwindigkeit des Pendels minimal) als Empfehlung gegeben.

Um den Start-Stopp-Fehler zu minimieren, scheint es sinnvoll, nicht nur eine Schwingung zu zählen. Die Wahl der Schwingungsanzahl pro Messung sollte gut kopfrechenbar sein und bei allen Messungen gleich gehalten werden (z. B. 2, 5, 10). Als Faustregel kann gelten: je höher die Anzahl, desto genauer das Ergebnis (hierbei sollte aber zwischen Messaufwand und Ergebnisverbesserung abgewogen werden).

Statistische Fehler:

Bei naturwissenschaftlichen Messungen kommt es meist vor, dass auch bei gleicher Anordnung und gleichen Bedingungen die ermittelten Werte unterschiedlich sind. Dies lässt sich im statistischen Fehler zusammenfassen.

Um zu sehen, ob das Experiment reproduzierbar ist und um eine statistische Fehlerbetrachtung durchführen zu können, sollte der Versuch bei denselben Bedingungen mehrfach durchgeführt werden. Als Faustregel kann ebenfalls gelten, dass der statistische Fehler umso kleiner wird, je mehr Versuche aufgenommen werden (hierbei ist wieder der Messaufwand zu berücksichtigen).

Wird ein Wert M n-mal gemessen so ergibt sich sein arithmetisches Mittel $\overline{M}$ zu

$$\overline{M} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Die Standardabweichung benutzt man zur Beurteilung der Streuung S der Einzelmesswerte um den Mittelwert

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \overline{M}\right)^2}.$$

Der mittlere Fehler des Mittelwertes ergibt sich aus dem Fehlergesetz zu

$$\Delta M = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(M_i - \overline{M}\right)^2}.$$

Der Messwert kann jetzt mit seinem absoluten Fehler angegeben werden

$$M = \overline{M} \pm \Delta M.$$

Der relative Fehler γ wird oft als Güte angegeben,

$$\gamma = \left|\frac{\Delta M}{M}\right| \qquad \gamma = 100 \cdot \gamma,$$

die meist einer Prozentangabe entspricht.

Die Standardabweichung S konvergiert mit Anzahl n der Messungen gegen einen konstanten Wert. Will man die Güte einer Messung verbessern, so gilt folgende Faustregel: *Um den mittleren Fehler einer Messgröße zu halbieren, muss man die Zahl der Einzelmessungen vervierfachen.*

Gibt es unterschiedliche Messgrößen, aus denen eine weitere Größe berechnet werden soll, so sollte/kann das Fehlerfortpflanzungsgesetz berücksichtigt werden.

Analytische Fehler

Unter analytischen Fehlern kann man die Fehler zusammenfassen, die durch Darstellung und Interpretation auftreten.

Falls man die Messung in ein Diagramm einträgt, kann es vorkommen, dass sie mit einem linearen Zusammenhang in Verbindung gebracht werden. Er ist aber nicht linear, wie gleich ersichtlich wird.

II.4 Grafische Darstellung und Auswertung

Nachdem eine qualitative Formulierung aufgestellt wurde sollte überprüft werden, ob sich die Messungen auch in einem grafischen Zusammenhang darstellen lassen.

Hierzu trägt man die ermittelten Zeiten für verschiedene Längen in einem xy-Diagramm ein.

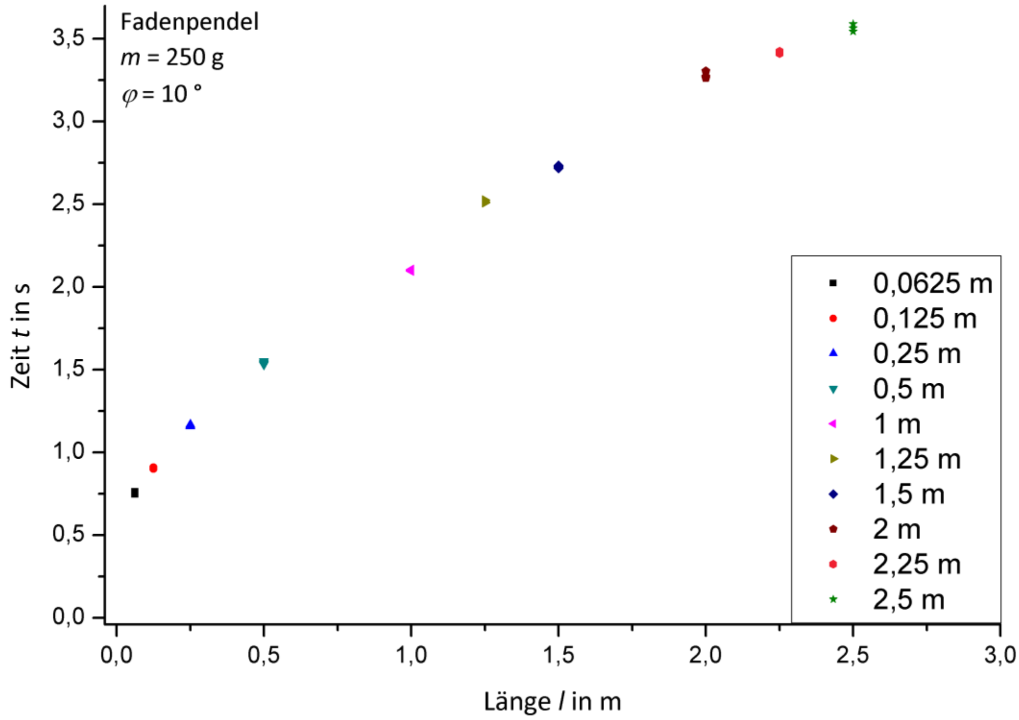


Abbildung 4: Messwerte der Pendelmessung (jeweils 10 Messungen pro Länge)

In Abbildung 3 lässt sich gut erkennen, dass es nur sehr wenig Streuung der Messwerte gibt. Zusammengefasst und mit Fehlerbalken sieht das Ergebnis wie folgt aus (alle Werte sind über 10 Messungen gemittelt):

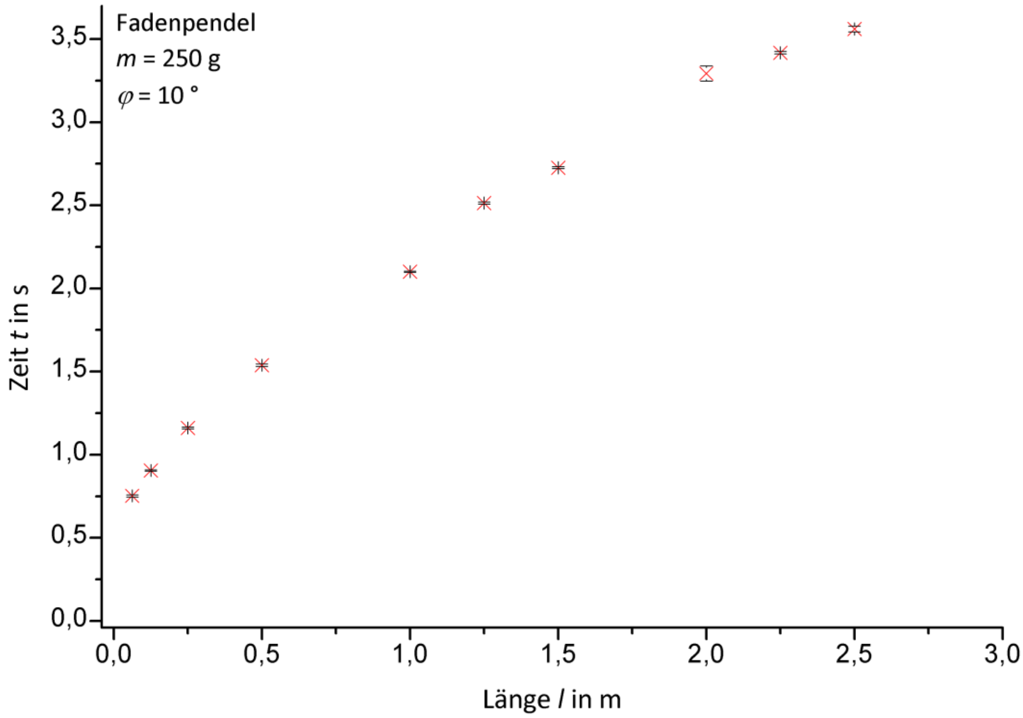


Abbildung 5: Gemittelte Messwerte und Fehlerbalken

Nun überlegt man sich, welchen mathematischen Verlauf solche Messwerte haben könnten. Es könnte den Anschein haben, dass es sich um einen linearen Zusammenhang handelt.

II.5 Fitten der Daten

Es gibt unterschiedlicher Möglichkeiten aus den gewonnen Daten auf eine Formel zu kommen. Drei sollen hier beschrieben werden.

II.5.1 Computerprogramm.

Ergebnis der mathematischen Anpassung mittels Computerprogramm:

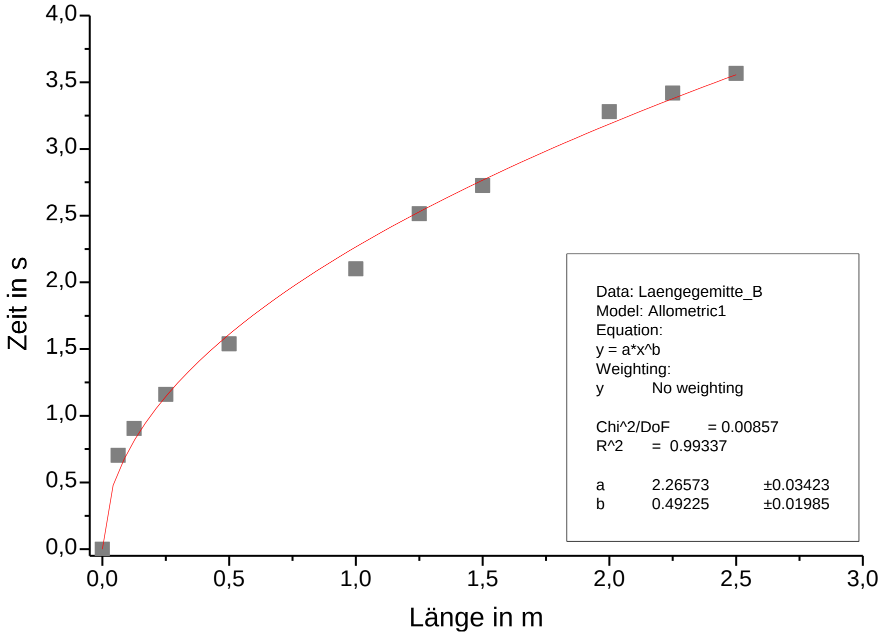


Abbildung 6: Messwerte und Fit

Die Daten wurden mittels Origin[7] geplottet und gefittet. Es lässt sich aber auch mit dem Freeware-Programm CurveExpert Basic [7] darstellen.[8] Es fällt auf, dass hier ein Punkt hinzugenommen wurde, und zwar (0|0). Diese Überlegung ist rational, sie geht davon aus, dass bei der Pendellänge von *0* m die Schwingungsdauer *0* s beträgt.

Es wurde eine Potenzfunktion als Fit gewählt. Aus den Ergebnissen lässt sich folgende Formel konstruieren:

$$T = 2{,}27 \pm 0{,}03 \cdot l^{0{,}49 \pm 0{,}02}.$$

Umgeformt und gerundet heißt dies:

$$T = 2{,}27 \cdot \sqrt{l}.$$

Quantitativ ist somit die Periodendauer von der Wurzel der Pendellänge abhängig.

[7] Origin ist ein professionelles Messdaten- und Auswertungsprogramm. Für den Schul- und Privatgebrauch aber zu kompliziert und komplex.

[8] In Exel sind sie zwar ebenfalls darstellbar, aber können nicht (oder nur linear) gefittet werden. Ab Exel 2010 gibt es zwar nicht nur lineare Ausgleichskurven, aber keine für Wurzelfunktionen. Der Fit kann aber auch mit einem grafikfähigen Taschenrechner (etwa dem TI Voyager 200) ermittelt werden.

II.5.2 Linearisierung

Bei der Linearisierung versucht man die Messwerte so umzurechnen, dass beim Fitten des Grafen eine Gerade herauskommt.

Nimmt man die Messwerte aus Tabelle 1 ergibt sich:

Länge l in m	0	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	1,25	1,5	2	2,25	2,5
Zeit² t^2 in s²	0	0,5041	0,81	1,3456	2,3409	4,41	6,3001	7,3984	10,8241	11,6964	12,6025

Im Graf lässt sich eine Ursprungsgerade einzeichnen und die Steigung bestimmen.

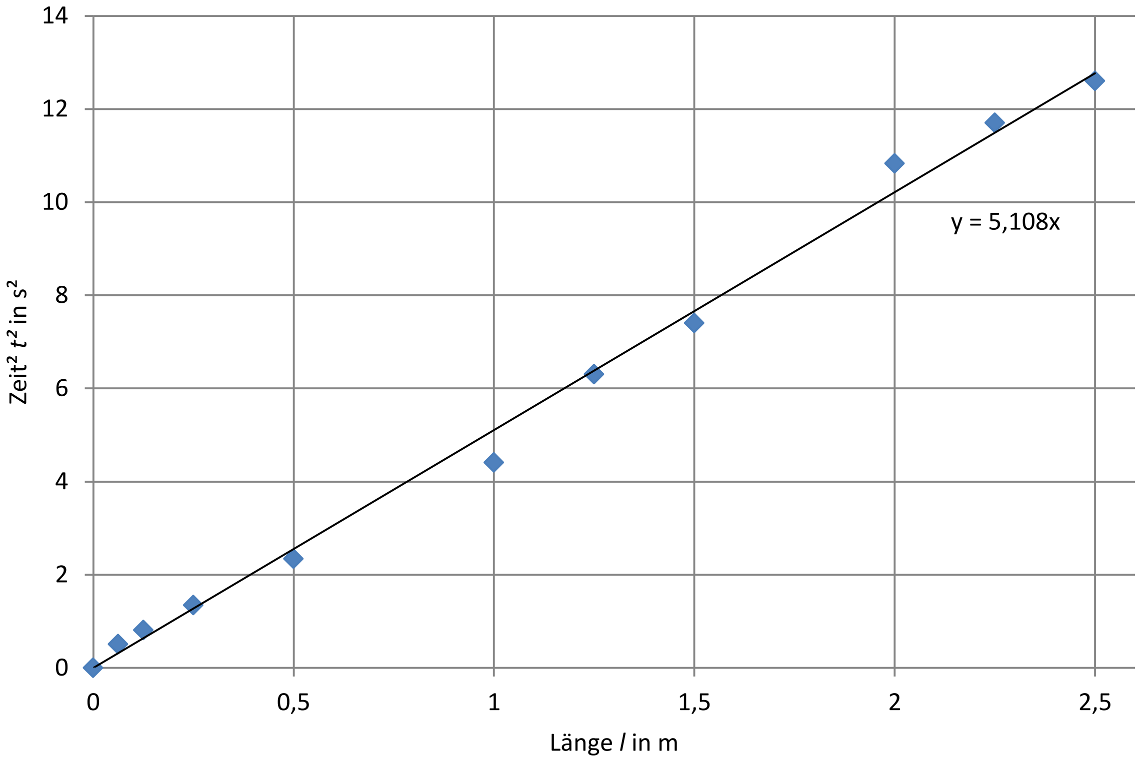


Abbildung 7: Linearisierung der Messwerte (geplottet mit Exel 2010)

Es ergibt sich ein Fit von

$$y^2 = 5{,}108 \cdot x.$$

Da hier die y Werte quadriert wurden, muss man einfach die Wurzel ziehen

$$y = 2{,}26 \cdot \sqrt{x}.$$

Dieser Wert passt sehr gut mit dem Fit von Origin zusammen.

II.5.3 Grafikfähiger Taschenrechner

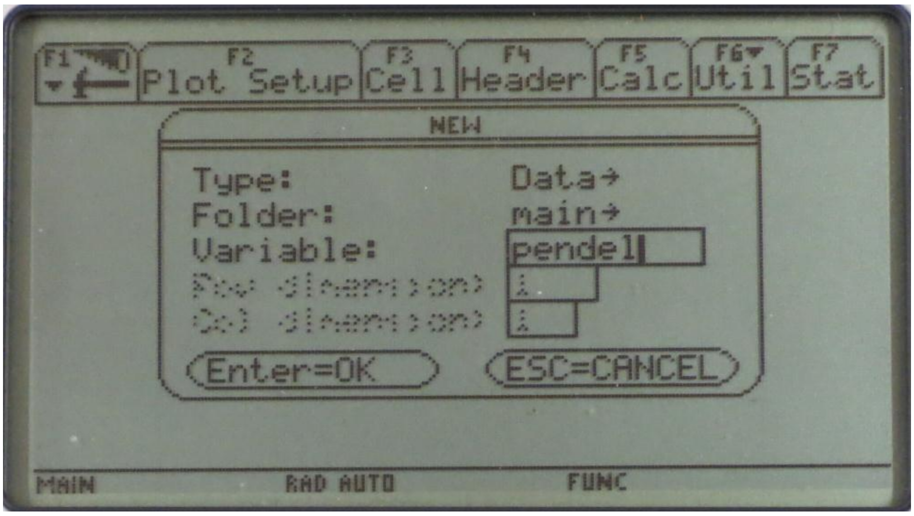
Da viele Schulen grafikfähige Taschenrechner in Physik und Mathematik einsetzen, soll hier das Beispiel für einen *Texas Instruments yoyage 200* ausführlich erläutert werden. Es stellte sich im Testunterricht heraus, dass viele Schülerinnen und Schüler große Probleme mit dem Umgang des Taschenrechners haben, explizit mit der Erstellung eines Grafen und dem anschließenden Fit.

Man nehme die Daten aus Tabelle 1:

Länge *l* in m	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	1,25	1,5	2	2,25	2,5
Zeit *t* in s	0,71	0,9	1,16	1,53	2,1	2,51	2,72	3,29	3,42	3,55

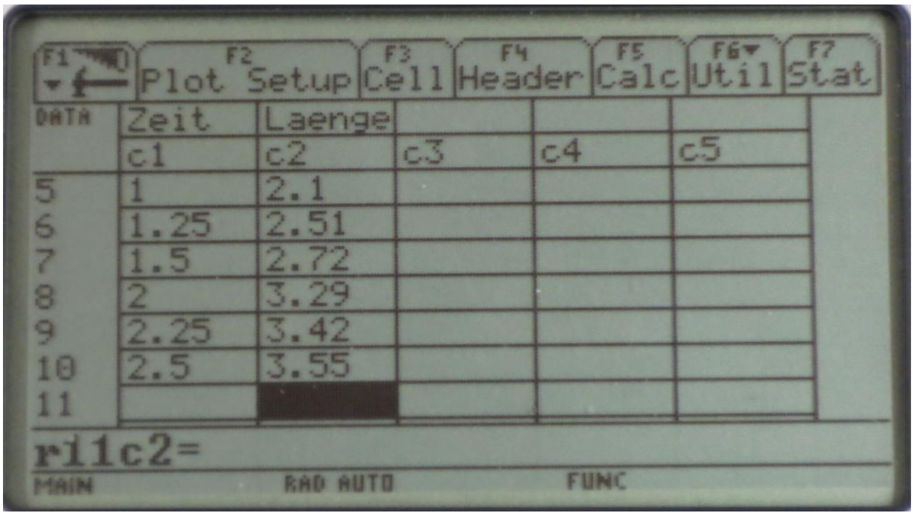
Daten in Matrix eingeben:

Nach dem Einschalten (oder auf **APPS**) auf **Daten/Matrix** gehen und **Enter** drücken, dann Auswahl **3:New**

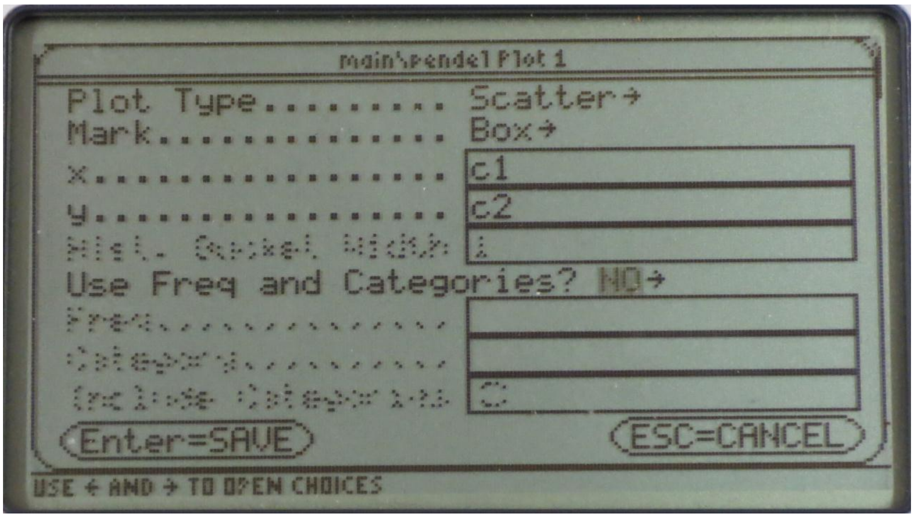


Variable Name eingeben: z. B. **pendel**

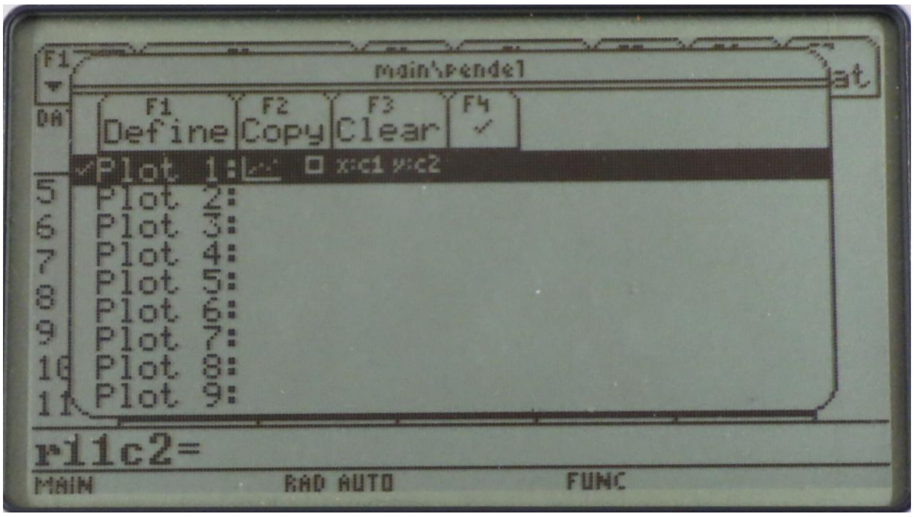
Dann die Daten eingeben. Achtung den Wert 0 und 0 darf man nicht eingeben, da sonst nicht gefittet werden kann (**Error Stat**), auch einsetzten von sehr kleinen Werten verfälscht das Ergebnis, am besten 0|0 weglassen.



Zum Plotten muss der Graf noch definiert werden. Hierzu erst **F2**, dann **F1** drücken.

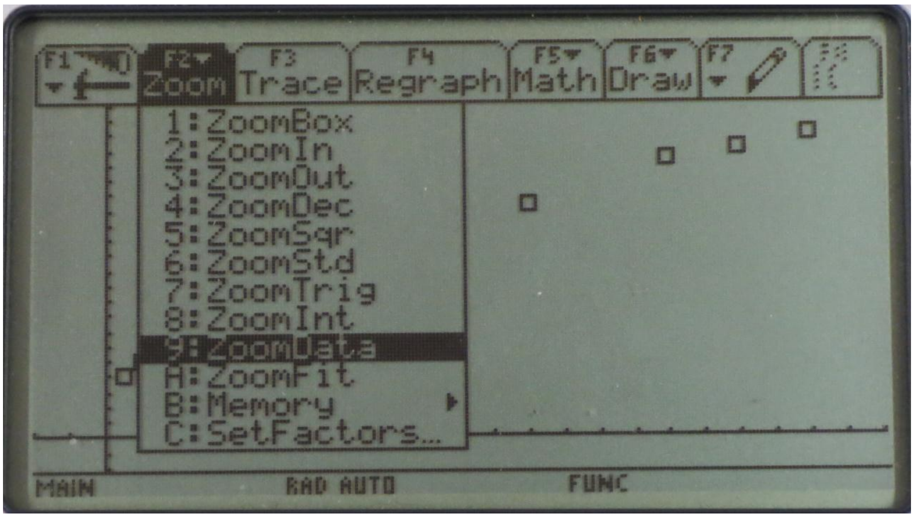


Dann sollte der Graf definiert sein.

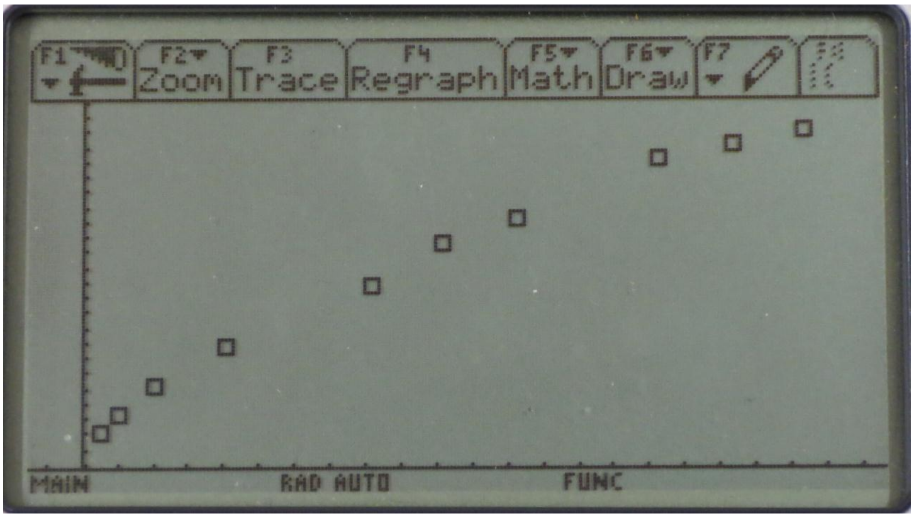


Raute (grüne Taste) + **R** (**GRAPH**) schaltet zum Grafenbildschirm.

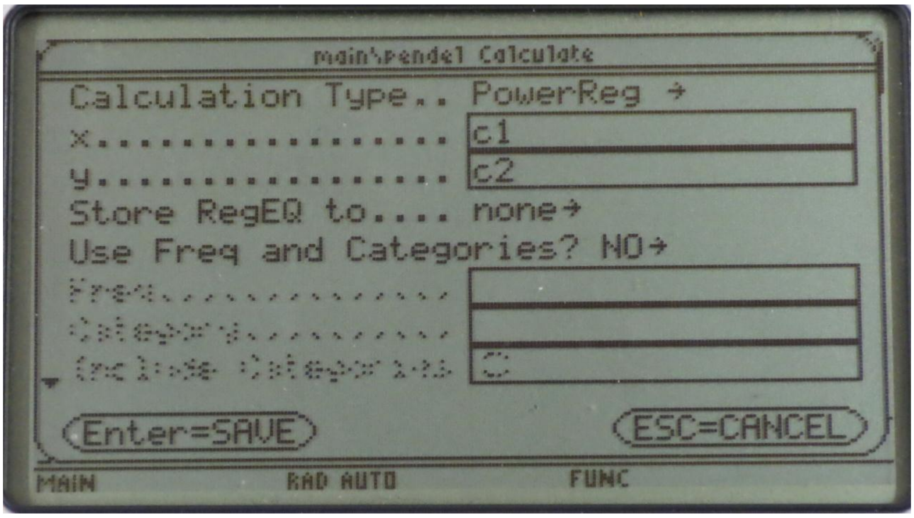
Zum Zoomen der Daten **F2** und **9:ZoomData** auswählen.



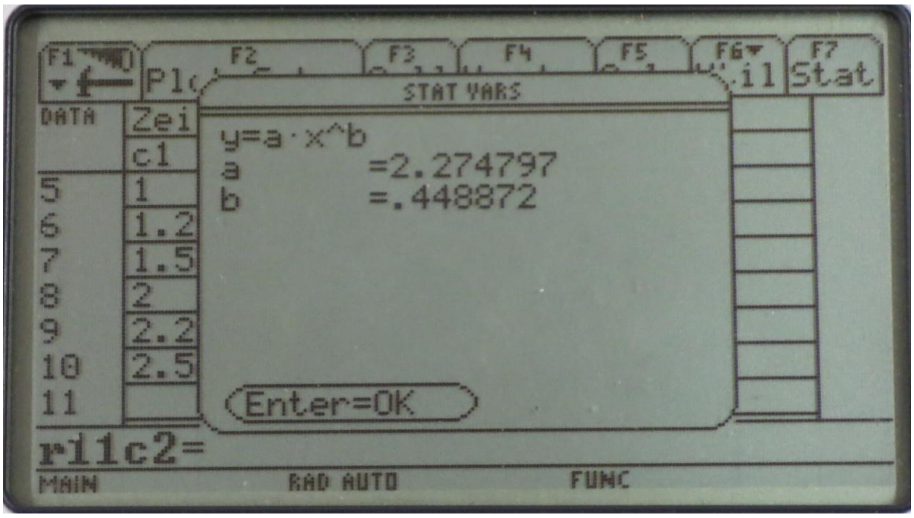
Dann erhält man den Grafen.



Zum Fitten muss man wieder in die Matrix, hierzu **APP** drücken und dann **Daten/Matrix**. Hier dann **1:Current** wählen. Mit **F5:Calc** kommt man in den Calculate Schirm. Als Typ **8:PowerReg** auswählen. Dabei **Store RegEQ to** auf **y1(x)** setzen, damit das Ergebnis als Funktion gespeichert und kann später geplottet werden kann.



Jetzt bekommt man den Fit.



Der Vorfaktor stimmt mit dem Ergebnis aus dem Fit mit Origin und der Linearisierung gut überein. Nur der Exponent ist nicht 0,5, sondern 0,45. Hier muss ein wenig Unterstützung vom Lehrer gegeben werden, dass man diese auf 0,5 rundet. Dann kommt auch hier eine Wurzel-Funktion heraus

$$y = 2{,}27 \cdot \sqrt{x}.$$

Die Linearisierung lässt sich natürlich ebenfalls mit dem Taschenrechner durchführen, hier muss dann aber unter **F5:Calc** unter Type **LinReg** ausgewählt werden.

Alle drei Methoden kommen ungefähr auf einen ähnliche Formel für die Anpassung der Daten. Es handelt sich um eine Wurzelfunktion.

III. Theoretisches Herangehen

Ein anderer Ansatz in der Physik ein Problem zu lösen, ist der sogenannte theoretische Ansatz, der vor allem in der theoretischen Physik benutzt wird. Hier schließt man nicht induktiv von einzelnen Ergebnissen auf eine allgemein Aussage (Formel), sondern von höheren Prinzipien auf eine allgemeine Formel, die für das betrachtete Problem gilt. Im Gegensatz zum experimentellen Herangehen wird hier meist deduktiv gearbeitet. Dies bedeutet unter anderem, dass eine völlig andere Methodologie (gr. METODOLOGÍA „Lehre von der Vorgehensweise“) benutzt wird.

III.1 Aufstellen der theoretischen Gleichungen

Zunächst muss eine allgemeine Bewegungsgleichung aufgestellt werden, die den Gesetzen von Newton folgt.

An die Masse greift die Gewichtskraft F_G an:

$$F_G = m \cdot g; \text{ mit } g = 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \text{ (Fallbeschleunigung)}$$

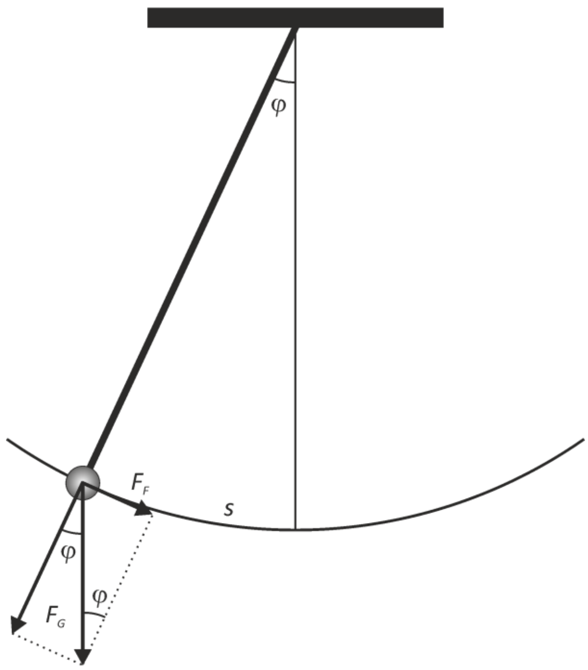


Abbildung 7: Schematische Darstellung eines Fadenpendels

Dabei übt der Faden aber eine Zwangskraft aus, die dafür sorgt, dass der Abstand der Masse zum Punkt der Aufhängung konstant bleibt. Deshalb wirkt nur die Komponente der Schwerkraft, die senkrecht zum Faden steht. In diesem Fall gilt dann

$$F_F = -m \cdot g \cdot \sin(\varphi).$$

Für das Aufstellen eines Kräfteverhältnisses wird noch das zweite Newtonsche Axiom, welches die Kraft F mit der Masse m und der Beschleunigung a verknüpft, gebraucht.

$$F = m \cdot a$$

III.2 Entwickeln der Differenzialgleichung

Bei einer Auslenkung legt das Pendel mit der Fadenlänge l und der Auslenkung φ auf dem Kreis eine Stecke von $s = l \cdot \varphi$ (φ im Bogenmaß) zurück. Die Beschleunigung ergibt sich aus der zweifachen Ableitung der Strecke nach der Zeit.

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = l \cdot \ddot{\varphi}$$
$$F = m \cdot l\ddot{\varphi}$$

Setzt man die beiden Kräfte ins Verhältnis ergibt sich

$$m \cdot l\ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin(\varphi).$$

Nach Umformungen, wobei sich die Masse herauskürzt (⇒ Pendeldauer nicht von der Masse abhängig), ergibt sich

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \sin(\varphi).$$

Für kleine Auslenkungswinkel $\varphi \leq 5°$ (entspricht $\frac{5}{360} \cdot 2\pi$ im Bogenmaß) kann man die Kleinwinkelnäherung annehmen ⇒ $\sin(\varphi) \approx \varphi$. Unsere Gleichung ändert sich zu

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \varphi.$$

III.3 Finden einer Lösung für die Differenzialgleichung

Dies ist eine Differenzialgleichung (DGL) zweiter Ordnung. Da es sich um eine Pendelschwingung handelt, kann für die Lösung eine Schwingungsgleichung angesetzt werden

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + k).$$

Hierbei nennt man φ_0 die Maximalamplitude, ω die Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi \cdot f$). Um die DGL zu lösen, muss die zweite Ableitung nach der Zeit gebildet werden

$$\dot{\varphi} = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t + k) \cdot \omega$$

$$\ddot{\varphi} = -\varphi_0 \cdot \sin(\omega t + k) \cdot \omega^2.$$

Setzt man diese in die DGL ein, ergibt sich

$$-\varphi_0 \cdot \sin(\omega t + k) \cdot \omega^2 = -\frac{g}{l} \cdot \varphi_0 \cdot \sin(\omega t + k).$$

Das Phi, das Minus und der Sinus kürzen sich heraus (⇒ Pendeldauer nicht von der Auslenkung abhängig)

$$\omega^2 = \frac{g}{l}.$$

Die Kreisfrequenz ist mit der Periodendauer T verknüpft

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Nach Ziehen der Wurzel von ω^2 und einsetzen, ergibt sich

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die theoretische Herleitung zeigt, dass die Pendeldauer (bei kleinen Auslenkungen) nur von der Länge des Pendels und der Fallbeschleunigung abhängig ist. Dies bedeutet, dass auf dem Mond, wo eine andere Fallbeschleunigung herrscht, die Periodendauer des Pendels bei gleicher Länge unterschiedlich ist.

IV. Vergleich von experimentellen und theoretischen Herangehen

Abschließend wird überprüft, ob die Ergebnisse von mathematischer Modellierung und theoretischer Überlegung in Einklang gebracht werden können.

IV.1 Mathematische Modellierung und theoretische Überlegung

Bei diesem Beispiel ergab sich aus dem grafischen Fit

$$T = 2{,}27 \cdot \sqrt{l}.$$

Und aus dem theoretischen Modell

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Die beiden Formeln sehen sich schon von der Gestalt her ähnlich, aber es ist nicht klar, ob die Vorfaktoren zusammenpassen. Da die Messungen auf der Erde gemacht wurden, ist die Fallbeschleunigung nahezu konstant. Rechnet man die Vorfaktoren der theoretischen Formel in Zahlenwerte um, so ergibt sich

$$T = 2{,}01 \cdot \sqrt{l}.$$

Das Ergebnis zeigt einen Fehler im Vorfaktor von ca. 11%. Betrachtet man die Fehler, die bei Messungen auftauchen können und die Vereinfachung, die in das theoretische Modell eingehen, so ist die Übereinstimmung zwischen Experiment, mathematischer Modellierung und theoretischem Modell als gut zu bewerten.

In diesem Beispiel wurde absichtlich ein systematischer Fehler eingebaut: beim Messen der Pendellänge im Experiment wurde nur die Fadenlänge gemessen, aber nicht die eigentliche Länge vom Aufhängepunkt zum Massenmittelpunkt. Dass die Fallbeschleunigung eine Rolle spielt ist durch die Messung nicht einfach heraus zu finden. Hierzu müsste ein Versuch gebaut werden, welcher den Anteil von g ändert (Solch einen Versuch gibt es, er heißt das variable g-Pendel. Z. B. für Cassy von LD-Didactic [8] oder Phywe [9]).

IV.2 Verifizierung des Modells

Um zu prüfen, ob die Formel auch wirklich die Realität beschreibt, sollte man eine Prüfung des Modells vornehmen.

Die theoretische Herleitung ergab, dass die Pendeldauer auf der Erde vor allem von der Länge des Fadens abhängt. Um zu sehen, ob dies richtig ist gibt man jetzt ein mögliches Ergebnis vor und prüft es im Experiment nach. Spektakulär ist hier ein richtig langes Pendel, welches man im Treppenflur aufbaut, falls dies möglich ist.

IV.3 Aussage / Zusammenfassung

Nach der Überprüfung des Modells kann vorläufig davon ausgegangen werden, dass die Pendeldauer T von der Pendellänge l und der Fallbeschleunigung g abhängt. Als mathematischer Zusammenhang ergibt sich

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Literatur:

[1] *Impulse Physik 11/12 (2010) für Niedersachsen G 8, Klett*

[2] *World's Largest Rope Swing (2012) hochgeladen auf YouTube von devinsupertramp http://www.youtube.com/watch?v=4B36Lr0Unp4 (18.10.2012)*

[3] *Riesenschaukel das Ergebnis (2011) hochgeladen auf youtube.com von sbtBeatenberg http://www.youtube.com/watch?v=JAuIfZVQFhY (18.10.2012)*

[4] *Riesenschaukel (2007) hochgeladen auf MyVideo von franzimaus93 http://www.myvideo.de/watch/1981514/riesenschaukel (18.10.2012)*

[5] *Roth, G. (2007) Persönlichkeit, Entscheidung und Verhalten. Stuttgart: Klett-Cotta*

[6] *Roth, G. (2006) Möglichkeit und Grenzen von Wissensvermittlung und Wissenserwerb. In Caspary (Hg.) Lernen und Gehirn. Verlag Herder*

[7] *CurveExpert Basic 1.4 (evaluation edition) www.curveexpert.net/downloads/cvxpt140.exe (18.10.2012)*

[8] *LD-Didactic, Schramm, C. (2008) Pendel mit veränderbarer Fallbeschleunigung (variables g-Pendel) http://www.ld-didactic.de/literatur/hb/d/p1/p1516_d.pdf (18.10.2012)*

[9] *Phywe Variables g-Pendel https://www.phywe.de/51/pid/26209/Variables-g-Pendel-.htm (18.10.2012)*