

## U=R\*I oder R=U/I - Untersuchungen zur Darstellung von Formeln

Alexander Strahl\*, Rainer Müller\*

\* TU-BS, IFdN, Abteilung: Physik und Physikdidaktik,  
Pockelsstraße 11, 38106 Braunschweig

### Kurzfassung

Da der Inhalt von Formeln durch ihre Darstellung vermittelt wird, ist ihre äußere Gestalt eine wichtige Eigenschaft. Oberflächenmerkmale wie Länge, Indizes, griechische Buchstaben usw. können auf Lernende mehr oder weniger abschreckend wirken. Kann der Grad dieser Abschreckung quantitativ erfasst werden? Existieren bevorzugte Darstellungsformen für Teile von Formeln? In diesem Artikel sind die ersten vorläufigen Ergebnisse der Oberflächenanalyse von Formeln dargestellt.

### 1. Motivation

Das Erste, was bei der Betrachtung einer physikalischen Formel wahrgenommen wird, ist die äußere Form. Erst später wird sich mit dem Inhalt und anschließend mit der Bedeutung einer Formel befasst. Somit scheint es ratsam, wenn man sich dem Forschungsfeld Formeln *nähert*, sich zu Beginn mit der äußeren Form von Formeln zu beschäftigen, d. h. mit ihren Oberflächenmerkmalen.

Im Folgenden werden zwei Fragen untersucht:

1. Existierten bevorzugte Schreibweisen für Brüche, Produkte und andere Darstellungsmerkmale?
2. Gibt es Gesetzmäßigkeiten in der Einschätzung der Komplexität von Formeln?

Die Ergebnisse können möglicherweise dabei helfen die Schwierigkeiten von Lernenden bei der Benutzung physikalischer Formeln besser zu verstehen und Empfehlungen zu geben, wie Formeln besser präsentiert werden können.

### 2. Fragebogen

Zur Untersuchung der beiden Fragestellungen wurde ein Fragebogen entwickelt, der aus drei Teilen bestand. Im ersten Teil sollten unterschiedliche Darstellungsweisen für Brüche, Multiplikationen, Reihenfolgen, Konstanten, Wurzeln, e-Funktionen, Differenziale, Vektoren und Indizes ausgewählt werden. Neben den unterschiedlichen Darstellungsformen bestand zusätzlich die Möglichkeit *nicht entscheidbar/egal* anzukreuzen. Es war somit nicht nötig, sich für eine Darstellungsweise zu entscheiden. Auf den zweiten Teil der Befragung, in dem zehn Aussagen zu Formeln bewertet werden sollten, soll an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden. Die Probanden sollten im dritten Teil den Gefallens- bzw. Missfallensgrad von 32 Formeln bewerten. Es sollte untersucht werden, ob es äußere Merkmale einer Formel gibt, die sie für den Leser abschreckend (bzw. anziehend) macht. Hierfür wurde eine Fünferskala von 5: *schreckt mich ab* bis 1: *schreckt mich nicht ab* gewählt. Eine

Möglichkeit des Nichtbewertens wurde nicht gegeben.

### 3. Befragte Personen

An der Befragung nahmen 24 Probanden teil, von denen alle lehramtsorientierte Bachelor- oder Masterstudiengänge mit Physik als einem Fach gewählt haben. Die Gruppe kann als heterogen betrachtet werden, da sich unter den Befragten Studierende vom dritten Semester Bachelor bis zum zweiten Semester Master befanden. Die Studienziele reichten vom Sachunterricht, über Lehramt Haupt- und Realschule bis zum Lehramt Gymnasium.

### 4. Bevorzugte Darstellungsformen

Abbildung 1 zeigt ein Beispielergebnis für die bevorzugte Darstellungsweise für eine einfache Formel.

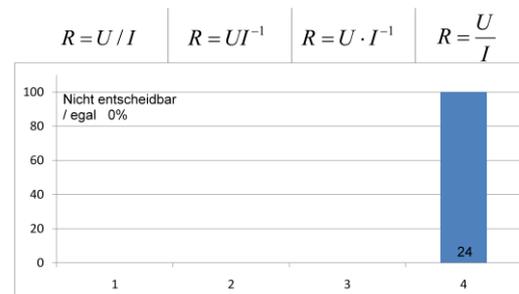


Abbildung 1: Darstellungsweisen von Brüchen

Das Ergebnis für Brüche ist eindeutig, alle Probanden entschieden sich für die explizite Bruchdarstellung mit waagrechttem Bruchstrich.

Bei der Multiplikation wurden zwei Möglichkeiten gegeben: mit oder ohne Malzeichen ( $U = RI$  vs.  $U = R \cdot I$ ). Hierbei entschieden sich 95,8% für die Darstellung mit Malzeichen ( $\cdot$ ) und nur eine der Versuchspersonen für die Darstellung ohne ( $\cdot$ ).

Für die Reihenfolge wurden vier Möglichkeiten angegeben ( $U = R \cdot I$ ,  $R \cdot I = U$ ,  $I \cdot R = U$  oder  $U = I \cdot R$ ). 95,8% wählten die erste (bekannte) Darstellung  $URI$  und nur einer  $UIR$ . Für die beiden

Formeln, bei denen die Spannung (U) auf der rechten Seite stand, entschied sich kein Proband.

Bei der Darstellung von Wurzeln wurden drei Möglichkeiten angegeben ( $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ,  $T = \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$

oder  $T = \left(\frac{l}{g}\right)^{0,5}$ . 95,8% entschieden sich dabei für die ausgeschriebene Wurzel Darstellung ( $\sqrt{\quad}$ ), nur einer wählte die Bruchversion.

Die Differentiale wurden in vier Formen vorgegeben ( $F = m \cdot \dot{v}$ ,  $F = m \cdot \dot{s}$ ,  $F = m \cdot \frac{dv}{dt}$  oder

$F = m \cdot \frac{d^2s}{dt^2}$ ). Hierbei entschieden sich 62,5% für die ausgeschriebene Form mit einer Ableitung  $\frac{dv}{dt}$

und 16,7% für die ausgeschriebene Form mit zwei Ableitungen  $\frac{d^2v}{dt^2}$ . 79,2% bevorzugten somit die ausgeschriebene Ableitung und nur 8,3% die Punktdarstellung. Drei gaben an, dass sie sich nicht entscheiden konnte, bzw. es ihnen egal sei.

Bei der Vektordarstellung gab es vier Möglichkeiten ( $F = m \cdot a$ ,  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ,  $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$ , oder  $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$ ). Es entschieden sich 54,2% für die Darstellung mit Vektorpfeilen. Eigenartig erscheint, dass sich 45,8% für die erste Darstellung ohne ge-

sonderte Akzentuierung der Vektoren entschieden. Die anderen Möglichkeiten wählte niemand. Das Bevorzugen der akzentlosen Version kann in zwei Richtungen gedeutet werden. Zum einen kann es sein, dass Vektoren für die Probanden ohne Schwierigkeit erkannt werden können und sie deshalb keine gesonderte Markierung benötigen. Eine andere Möglichkeit wäre, dass den Probanden Vektordarstellungen nicht geläufig sind. Aufgrund der vorliegenden Daten kann nicht zwischen den beiden Möglichkeiten unterschieden werden, weitere Untersuchungen sind nötig.

### 5. Bewertungskriterium für Formeln

Im letzten Teil des Fragebogens sollte untersucht werden, inwieweit Oberflächenmerkmale von Formeln identifiziert werden können, die sie auf Leser abschreckend (oder eben nicht abschreckend) erscheinen lassen. Es lässt sich eine Fülle von Parametern denken, von denen die Beurteilung der Probanden abhängt: Kommen griechische Buchstaben vor? Treten Indizes auf? Wie lang ist die Formel? Wie vertraut ist den Probanden das physikalische Themengebiet, aus dem die Formel stammt? usw.

Umso überraschender ist es, dass die Grundtendenz der Beurteilung auf einen einzigen Parameter

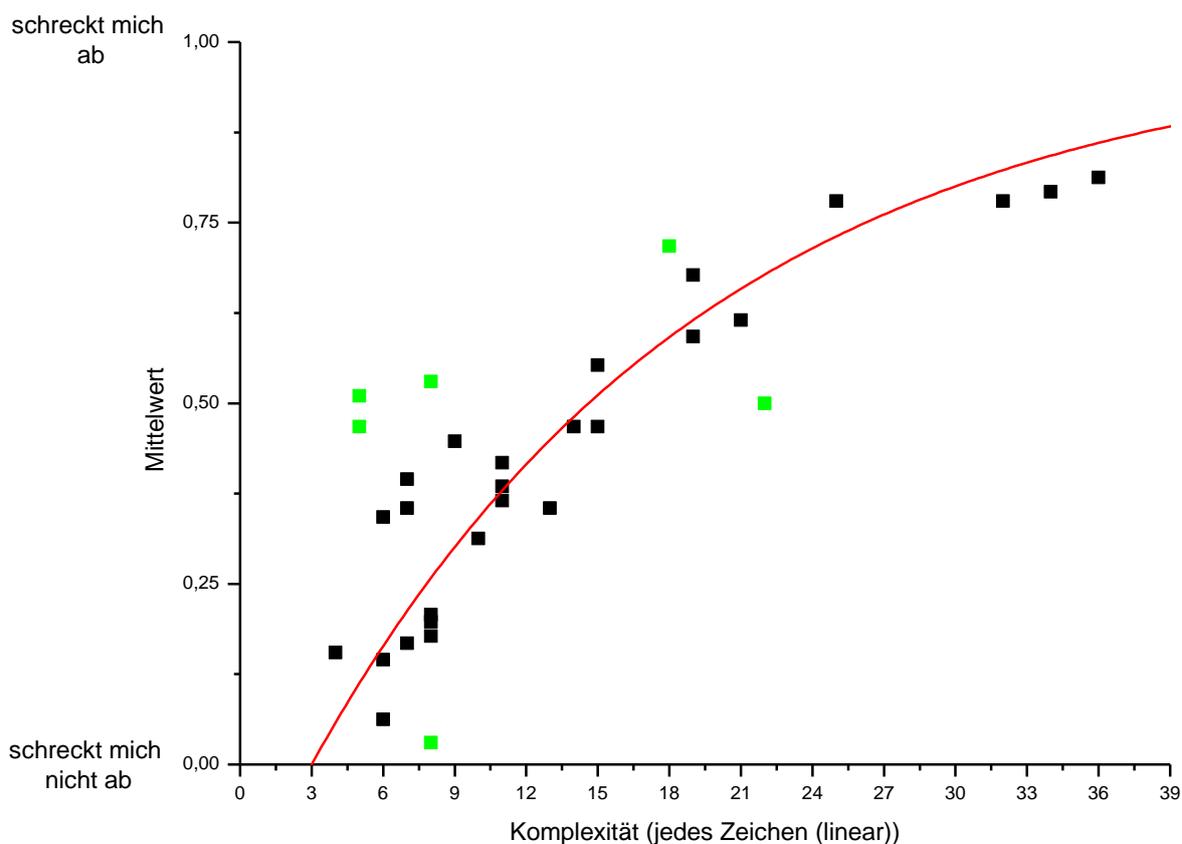


Abbildung 2: Mittelwerte der empfundenen Abschreckung.

Bei der Bestimmung der Komplexität der Formeln wurde jedes in der Formel vorkommende Zeichen gezählt (außer Malzeichen).

zurückgeführt werden kann, und das in einer Form, deren funktionale Abhängigkeit durch einen einfachen Formelansatz quantitativ erfasst werden kann.

Die Probanden sollten 32 Formeln (vom ohmschen Gesetz bis zur planckschen Strahlungsformel) bewerten. In Abbildung 2 sind auf der y-Achse die über die Probanden gemittelten Werte der „Abschreckung“ aufgetragen (von der Fünferskala umskaliert auf das Intervall zwischen 0 und 1). Auf der x-Achse ist das einfachste denkbare Komplexitätsmaß aufgetragen, nämlich die Formellänge. Es wurden alle in der Formel vorkommenden Zeichen gezählt, einschließlich Indizes, Vektorpfeilen, Quadratzeichen (jedoch keine Malpunkte). Drei Beispiele erläutern das Prinzip:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \cong 6 \text{ Zeichen}$$

$$U = n \cdot \frac{d\Phi}{dt} \cong 8 \text{ Zeichen}$$

$$\Theta_D = \frac{h\nu}{k_B} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)} \cong 18 \text{ Zeichen}$$

Die Werte in Abbildung 2 zeigen, dass das so definierte Komplexitätsmaß in einem einfachen funktionalen Zusammenhang mit der Beurteilung durch die Probanden zu stehen scheint. Im Wesentlichen scheint die Angabe der Formellänge ausreichend zu sein, um vorherzusagen wie abschreckend sie von den Probanden beurteilt wird.

Die Kurve zeigt, dass kurze Formeln von den Probanden als wenig abschreckend beurteilt werden. Lange Formeln werden als abschreckender bewertet, jedoch nicht linear mit der Zeichenzahl zunehmend. Das ist plausibel: Der Sprung von 4 auf 5 Symbole erscheint gravierender als der von 30 auf 31; die Beurteilung „läuft in eine Sättigung“.

Diese physikalische Analogie ließ es aussichtsreich erscheinen, eine Ausgleichskurve der Form  $1 - e^{-x}$  anzupassen, die derartige Situationen typischerweise beschreibt.

Sechs Punkte wurden aus der Analyse herausgenommen, da sie offensichtlich von der Kurve abweichen (in Abbildung 2 heller geplottet). Die Gründe für die vom „Normalfall“ abweichenden Einschätzungen lassen sich im Einzelfall verstehen.

Durch die übriggebliebenen 26 Punkte wurde eine Fitkurve mit folgenden Parametern gelegt:

$$y = 1 - e^{-\frac{x-3}{a}}$$

Die gefundene Funktion lässt sich mit nur einem freien Parameter  $a$  an die Daten anpassen, die Fitfunktion gibt den Verlauf der Daten sehr gut wieder. Die Fitfunktion schneidet die y-Achse bei  $x=3$ . Dies bedeutet, dass die einfachste mögliche Formel mit drei Zeichen (z. B.  $a=b$ ), als nicht abschreckend bewertet wird. Der Parameter  $a$  bestimmt die Steigung der Kurve und damit, bei welcher Symbolzahl die Einmündung in die Sättigung beginnt. Für die untersuchten Probanden ergab sich  $a = 16,8$ ;

vermutlich hängt  $a$  davon ab, wie geübt die Probanden im Umgang mit Formeln sind.

## 6. Kritik

Durch die wenigen befragten Probanden können die Ergebnisse selbstverständlich nicht als empirischer Befund gewertet werden, aber die teilweise sehr eindeutigen Ergebnisse aus Teil 1 scheinen doch überraschend, wenn man berücksichtigt, dass es sich bei der befragten Gruppe um eine heterogene handelt. Bei anderen Ergebnissen scheint es so, als ob die ausgewählten Darstellungsarten nicht klar genug gegeneinander abgegrenzt worden sind und bessere gefunden werden müssen. In Zukunft sollten für die Bestimmung der bevorzugten Darstellungsart (Teil 1) nicht nur Formeln mit semantisch-physikalischem Inhalt betrachtet werden, sondern zusätzlich die reinen mathematischen Darstellungsformen mit einbezogen werden. Dies scheint notwendig, um zu sehen, in wieweit die bevorzugte Darstellung an den physikalischen Inhalt gekoppelt ist.

Um die Fitkurve aus Teil 3 zu bestätigen und gegebenenfalls den Faktor  $a$  genauer interpretieren zu können sind weiter Untersuchungen notwendig.